PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 17/18

Übungsblatt 7

Modulformen für Γ_1

25. Wachstumsverhalten von Spitzenformen

    (a) (1 Punkt) Es seien $f, g \in A_k(\Gamma_1)$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $h(\tau) = f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^k$ invariant unter der Wirkung von Γ_1 ist.

    (b) (1 Punkt) Es sei $f \in S_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass $h(\tau) = |f(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^{\frac{k}{2}}$ auf $\mathbb{H}$ ein Maximum annimmt.

    (c) (2 Punkte) Es sei $f \in A_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass $f \in S_k(\Gamma_1)$ genau dann, wenn $|f(\tau)|(\operatorname{Im}\tau)^{\frac{k}{2}}$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist.

26. Wachstumsverhalten der Fourierkoeffizienten von Spitzenformen

    (4 Punkte) Es sei $f \in S_k(\Gamma_1)$ mit Fourier–Reihenentwcklung $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante C gibt, so dass gilt: $|a_n| \leq C n^{\frac{k}{2}}$ für $n \to \infty$.

    Benutzen Sie dazu die Integraldarstellung der a_n sowie Aufgabe 25.

27. Die Ramanujan τ–Funktion

    (a) (1 Punkt) Es sei $d_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass zu jedem d_k–Tupel komplexer Zahlen $(b_0, b_1, \ldots, b_{d_k-1})$ genau eine Modulform $f \in M_k(\Gamma_1)$ mit Fourier–Reihenentwicklung $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ existiert, deren erste d_k Fourierkoeffizienten gerade die vorgegebenen Zahlen sind: $a_k = b_k, k = 0, \ldots, d_k - 1$.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die lineare Relation zwischen E_{12}, E_6^2 und Δ.

    (c) (1 Punkt) Schreiben Sie $\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$. Drücken Sie $\tau(n)$ durch σ_{11} und σ_5 aus.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \bmod 691$.

28. Schwach holomorphe Modulformen
    Es sei $f \in M_k^!(\Gamma_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie $k = 12\ell + k'$ mit eindeutig bestimmtem $\ell \in \mathbb{Z}$ und $k' \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}_\infty f \leq \ell$ für jedes $f \neq 0$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (a) und Eigenschaften von $S_{k'}(\Gamma_1)$, dass es für jede ganze Zahl $m \geq -\ell$ genau ein $f_{k,m} \in M_k^!(\Gamma_1)$ gibt, deren Fourier–Reihenentwicklung die Form

$$f_{k,m}(\tau) = q^{-m} + O(q^{\ell+1})$$

hat.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\{f_{k,m} \mid m \geq -\ell\}$ eine Basis für $M_k^!(\Gamma_1)$ ist.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es ein Polynom $F_{k,D} \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad $D = \ell + m$ gibt, so dass $f_{k,m} = \Delta^\ell E_{k'} F_{k,D}(j)$ wobei $E_0 = 1$ und $j = {E_4}^3/\Delta \in M_0^!(\Gamma_1)$ ist. Betrachten Sie dazu zuerst den Fall $k = 0, \ell = 0$, dann den Fall $k \neq 0, \ell = 0$, dann den allgemeinen Fall.
Schliessen Sie daraus, dass die Koeffizienten $a_k(m,n)$ in der Fourierreihen–Entwicklung $f_{k,m} = q^{-m} + \sum_{n \geq \ell+1} a_k(m,n) q^n$ ganzzahlig sind.

Abgabetermin: Dienstag, 12. 12. 2017 um 10:00 Uhr.